

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[α, β]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α, β]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 5

Α2. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι λέμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

β. Αν η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ. Για να εφάπτεται η C_f στον άξονα $x'x$ θα πρέπει: $f(x_0)=0$ και $f'(x_0)>0$.

δ. Αν K είναι η συνάρτηση που εκφράζει το κόστος της παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος τότε, το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} K(x)$ εκφράζει το οριακό κόστος στο x_0 .

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ε. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ είναι το σύνολο $A=(0,+\infty)$.

Μονάδες 10

A4. i) Ισχύει η παρακάτω πρόταση; Σημειώστε στο τετράδιο σας «Ναι» ή «Όχι»:

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = l$ τότε υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ή $-l$.

Μονάδες 2

ii) Να δώσετε ένα παράδειγμα που να υποστηρίξετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1}$

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

B2. Να δείξετε ότι: $\frac{5}{8} < \int_{e^2}^{e^3} \frac{f(\ln x)}{x} dx < 1$

Μονάδες 5

B3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$, $x = \lambda$, $1 < \lambda < 2$.

Μονάδες 5

B4. Αν το λ μειώνεται με ρυθμό 1 m/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του $E(\lambda)$ τη χρονική στιγμή που είναι $\lambda = \frac{3}{2}$.

Μονάδες 5

B5. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{\int_2^3 f(x)dx - 1}{x - 2} - 8 \frac{\int_2^3 f(x)dx - 5}{x - 1} = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (1, 2).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x < 0 \\ 2\eta\mu x - x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

Γ1. Να δείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[-1, 1]$.

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογίσετε το: $\int_{-1}^{\pi} xf(x)dx$

Μονάδες 7

Γ4. Αν F μία παράγουσα της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$ με $F(0) = 0$, να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) \ln(1+x)}{e^x - x - 1}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ μία συνάρτηση με $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

Δ1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

Έστω επιπλέον F μία παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$ με $F(e) = e \ln 2$.

Δ3. Να δείξετε ότι $\ln 2 < F(1) < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1}$

Μονάδες 7

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Δ4. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_F , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$, να δείξετε ότι $E < e - 1 + \ln \frac{2e^2+1}{(e+1)^{e+1}}$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

- 1. Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων και να συμπληρώσετε την ημερομηνία αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
- 3. Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 4.** Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό.
- 5.** Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 6.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 11:30.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ